دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش منطق

عنوان

قضایای ناتمامیت گودل و راسر

استاد راهنما

دکتر سعید صالحی پور مهر

استاد مشاور

هژیر حومئی

پژوهشگر

مهرنوش صحاحی

۱۳۹۴

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقِّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سرِ فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می‌دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی‌آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می‌دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گَرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

روان پاک پدر و برادرم،

مادر مهربانم

و همسر عزیزتر از جانم

بنام خدا

ولم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق.

حمد و سپاس ارزانی بارگاه حضرت احدیت که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید. در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **سعید صالحی پورمهر**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر**هژیر حومه‌ای** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقای دکتر **جعفرصادق عیوضلو** که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم. از جناب آقای دکتر **پیام سراجی** که در تدوین این رساله کمک شایانی به اینجانب نمودند و همچنین از تمام دوستان دوران تحصیلم کمال قدردانی و تشکر را دارم.

ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی بخصوص دکتر **مرتضی فغفوری** و همچنین دکتر **اصغر رنجبری** مدیرگروه ریاضی محض و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

بوسه بر دستان مادرم و پدر ومادر همسرم می‌زنم که صبورانه رنج سال‌های تحصیل مرا تحمل کردند واندرز های‌شان همیشه روشنگر راهم بوده و خواهد بود انشاالله.

و سپاس و سپاس از همسر مهربانم که وجودش التیام‌بخش لحظه‌های سختی بود که سپری شد و عاشقانه مرا در این راه یاری کرد.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

مهرنوش صحاحی

۱۳۹۴

نام خانوادگی دانشجو: صحاحی نام: مهرنوش
عنوان: قضایای ناتمامیت گودل و راسر
استاد راهنما : دکتر سعید صالحی پور مهر استاد مشاور : هژیر حومئی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: منطق دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۴ تعداد صفحات: ۴۵
کلید واژه‌ها: قضایای ناتمامیت گودل، لم قطری‌سازی.
چکیده در این پایان‌نامه، اثبات‌های جدیدی از قضایای ناتمامیت که در دهه ۱۹۹۰ به دست آمده‌اند، ارایه می‌شود، به‌طوری که در آن‌ها از لم قطری سازی برای ساختن یک جمله مستقل استفاده نمی‌شود. اثبات این قضایا بدون استفاده از قضیه تمامیت حسابی‌سازی شده (توسط کوتلارسکی) در فصل دوم این پایان‌نامه بررسی شده‌اند، در فصل سوم اثبات ارایه شده توسط کیکوچی که مبتنی بر پارادوکس بِری است، مطرح شده و در فصل چهارم اثبات دیگر کوتلارسکی برای قضیه دوم ناتمامیت با استفاده از فرمول نظیر مسأله سگ آبی پُرکار (Busy Beaver) آمده است.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال ۱۹۳۰، گودل[1] [۵] قضایای مشهورش را در مورد ناتمامیت ریاضیات اثبات کرد. به‌زودی چندین نتیجه دیگر در این راستا پدیدار شدند که برخی از آنها عبارتند از:

۱. قضیه اول ناتمامیت گودل [۵].

۲. قضیه دوم ناتمامیت گودل [۶].

۳. قضیه راسر[2] [۱۹].

۴. قضیه چرچ[3] درباره تصمیم ناپذیری منطق مرتبه اول [۴].

۵. قضیه تارسکی[4] در مورد تعریف ناپذیری درستی [۲۱].

۶. قضیه سلسله مراتب حسابی [۱۲] و [۱۷].

۷. تصمیم ناپذیری مسأله توقف ماشین‌های تورینگ [۲۲].

گودل، نوعی رمزگذاری نحوی را روی اعداد طبیعی به کار برد که به حسابی سازی فرا ریاضیات مشهور است. سپس او جمله‌ای ساخت که ادعا کننده اثبات‌ناپذیری آن بود. بعداً رادولف کارناپ[5]، لم مشهور قطری را از برهان گودل استنباط کرد [۲۰] و [۷]. عبارت گودل، مشابه جمله غیر صوری «این جمله غلط است» بود. در حقیقت گودل آن را به «این گزاره اثبات‌پذیر نیست» تغییر داد. برای ساختن این جمله، گودل از فنی که امروزه به نام لم قطری معروف است، استفاده کرد. در حقیقت

[1] K. Gödel

[2] J.B. Rosser

[3] A. Church

[4] A. Tarski

[5] R. Carnap

اثبات لم قطری کوتاه است، اما تصور آن سخت و دشوار. حذف این لم از برهان‌های قضایای گودل تنها در دهه ۱۹۹۰ و بعد آن ممکن شد؛ [۸، ۱۰، ۱۳] و [۱۴، ۱۱، ۱۵] را ببینید. در این پایان‌نامه که بر مبنای مقاله‌های [۱۶، ۱۵] تنظیم شده، موارد زیر را ارایه خواهیم داد:

۱. اثبات کوتلارسکی[۶] [۱۵] برای قضایای ناتمامیت که در آن از قضیه تمامیت حسابی‌سازی شده استفاده نمی‌شود و همچنین اثباتی از قضیه سلسله مراتب حسابی بدون استفاده از لم قطری‌سازی.

۲. اثبات کیکوچی[۷] [۱۰] که بر اساس پارادوکس بری است؛ کار کیکوچی بیشتر از کار جورج بولوس[۸] [۱] قابل گسترش است.

۳. اثبات کوتلارسکی [۱۳] بر اساس مسأله مشهور سگ آبی پُرکار (**Busy Beaver**).

---

۶ H. Kotlarski

۷ M. Kikuchi

۸ G. Boolos

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعریفی دقیق از فرمول $\mathsf{Sat}_{\Sigma_n}(x,y)$ ارایه می‌شود که با استفاده از آن در فصل دوم، $\mathbf{Tr}_{\Sigma_n}(x)$ را تعریف می‌کنیم.

دنباله ها

$(x)_y = z$ را رابطه‌ای در نظر می‌گیریم که دارای خواص زیر است:

$\forall x, y \exists ! z \;\; [(x)_y = z]$

$\forall x, y \;\; [(x)_y \leqslant x]$

$\forall x \exists y \;\; [(y)_0 = x]$

$\forall x, y, z \; \exists w \big[\forall i < z \; ((w)_i = (y)_i) \wedge (w)_z = x\big]$

و همگی این خواص در $\mathbb{N}$ درستند.

تعریف ۱.۰.۱.

$$lh(x) = y \longleftrightarrow (x)_0 = y$$

$$[x]_y = z \longleftrightarrow (y \geqslant lh(x) \;\; \wedge z = 0) \vee (y < lh(x) \;\; \wedge (x)_{y+1} = z)$$

بنابراین هر دنباله $[x]_0, \ldots, [x]_{l-1}$ توسط یک عدد (x) کدگذاری می‌شود در حالی که طول دنباله x برابر $(x)_0 = l$ است، و $\forall i < l \; (x)_{i+1} = [x]_i$. توجه کنید که فرمول‌های $\forall x \exists ! y (lh(x) = y)$ و $\forall x, y \exists ! z ([x]_y = z)$ هر دو درست هستند، و نیز $lh(x)$ و $[x]_y$ هر دو توابع بازگشتی هستند. از این تعریف و خواص روشن است که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $x_0, \ldots, x_{n-1}$، کوچکترین z با شرط $lh(z) = n$ که دنباله $x_0, \ldots, x_{n-1}$ توسط آن کدگذاری می‌شود، وجود دارد.

تعریف ۲.۰.۱. برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}[x_0, \ldots, x_{n-1}] = z \longleftrightarrow lh(z) = n \wedge \bigwedge_{i<n} ([z]_i = x_i) \\ \wedge \forall w < z \; (lh(w) \neq n \vee \bigvee_{i<n} [w]_i \neq x_i)\end{aligned}$$

پس $\{\langle x_\circ, \ldots, x_{n-۱}\rangle \mapsto [x_\circ, \ldots, x_{n-۱}] \mid n \in \mathbb{N}\}$ یک خانواده از توابع بازگشتی است.

تعریف ۳.۰.۱. عبارت

$$x^\frown y = z$$

معادل این مطلب است که z کوچکترین عددی است که در خاصیت زیر صدق می‌کند:

$$lh(z) = lh(x) + lh(y) \wedge [\forall i < lh(x)\ ([z]_i = [x]_i)] \wedge [(\forall j < lh(y)\ ([z]_{lh(x)+j} = [y]_j)]$$

این تعریف بیان می‌کند که $x^\frown y = z$ کد دنباله

$$[x]_\circ, [x]_۱, \ldots, [x]_{len(x)-۱}\text{،}\ [y]_\circ, [y]_۱, \ldots, [y]_{len(y)-۱}$$

با طول $lh(z) = lh(x) + lh(y)$ است. توجه کنید که $x \mapsto x^\frown y$ یک تابع بازگشتی است.

تعریف ۴.۰.۱. عبارت

$$w = \langle x \restriction y\rangle$$

معادل با این مطلب است که w کوچکترین عددی است که

$$.lh(w) = y \wedge \forall i < lh(w)\ ([w]_i = [x]_i)$$

چنان که، اگر x کد دنباله

$$[x]_\circ, [x]_۱, \ldots, [x]_{lh(x)-۱}$$

و $y \leqslant lh(x)$ باشد آنگاه $w = \langle x \restriction y\rangle$ کوچکترین کد برای دنباله

$$\langle [x]_\circ, [x]_۱, \ldots, [x]_{y-۱}\rangle$$

با طول y است. توجه کنید که اگر $y > lh(x)$ باشد آنگاه (چون تعریف کردیم برای $i \geqslant lh(x)$،

$([x]_i = 0)$ $w = \langle x \upharpoonright y \rangle$ کوچکترین کد برای دنباله $[x]_0, [x]_1, \ldots, [x]_{lh(x)-1}, 0, \ldots, 0$ با طول y است.

تعریف بعدی، $x[y/z]$ است بدین معنی که $z < lh(x)$ کوچکترین کد برای دنباله

$$\langle [x]_0, [x]_1, \ldots, [x]_{z-1}, y, [x]_{z+1}, \ldots, [x]_{lh(x)-1} \rangle$$

است و اگر $z \geqslant lh(x)$ کوچکترین کد برای دنباله $[x]_0, [x]_1, \cdots, [x]_{lh(x)-1}, 0, \ldots, 0, y$ است (درحالی که دنباله، طول z دارد).

تعریف ۵.۰.۱. عبارت

$$x[y/z] = w$$

معادل با این مطلب است که w کوچکترین عددی است به طوری که

$$lh(w) = max(lh(x), z+1) \wedge \forall i < lh(w) \ \big[(i = z \to [w]_i = y) \wedge (i \neq z \to [w]_i = [x]_i)\big].$$

و $\langle x, y, z \rangle \mapsto x[y/z]$ یک تابع بازگشتی است.

زبان حساب را با نماد L_A مشخص می‌کنیم. در این زبان مرتبه اول $L_A = \{+, \times, S, 0, <\}$، $+$ و $\times$ نمادهای تابعی دو موضعی، S یک نماد تابعی یک موضعی، 0 نماد ثابت و $<$ یک نماد رابطه‌ای دو موضعی می‌باشد. تعریف زیر را داریم:

تعریف ۶.۰.۱. L_A فرمول termseq(s)، برابر

$$\forall i < lh(s) \left\{ \begin{array}{l} ([s]_i = \ulcorner 0 \urcorner) \vee \\ ([s]_i = \ulcorner 1 \urcorner) \vee \\ \exists j \leqslant s \ \big([s]_i = \ulcorner v_j \urcorner\big) \vee \\ \exists j, k < i \ \big[[s]_i = \ulcorner([s]_i + [s]_k)\urcorner\big] \vee \\ \exists j, k < i \ \big[[s]_i = \ulcorner([s]_i \cdot [s]_k)\urcorner\big] \end{array} \right\}$$

است و $\mathsf{term}(x)$، L_A فرمول $\exists s\ \mathsf{termseq}(s^\frown[x])$ را مشخص می‌نماید. بنابراین $\mathsf{termseq}(s)$ یک $\Delta_۱$ فرمول و $\mathsf{term}(x)$ یک $\Sigma_۱$ فرمول است.

تعریف ۷.۰.۱. فرمول $\mathsf{formseq}(s)$ برابر

$$\forall i<lh(s)\left\{\begin{array}{l}\exists u,v\leqslant i\ \big[term(u)\wedge([s]_i=\ulcorner(u=v)\urcorner\vee[s]_i=\ulcorner(u<v)\urcorner)\big]\\ \vee\exists j,k<i\ \big[[s]_i=\ulcorner([s]_j\vee[s]_k)\urcorner\big]\\ \vee\exists j,k<i\ \big[[s]_i=\ulcorner([s]_j\wedge[s]_k)\urcorner\big]\\ \vee\exists j<i\ \big[[s]_i=\ulcorner\neg[s]_j\urcorner\big]\\ \vee\exists j<i\ \exists k\leqslant s\ \big[[s]_i=\ulcorner\exists v_k[s]_j\urcorner\vee[s]_i=\ulcorner\forall v_k[s]_j\urcorner\big]\end{array}\right\}$$

بوده، و $\mathsf{form}(x)$ برابر فرمول $\exists s\,\mathsf{formseq}(s^\frown[x])$ است.

تعریف ۸.۰.۱. فرمول $\mathsf{formseq}_{\Delta0}(s)$ برابر

$$\forall i<lh(s)\left\{\begin{array}{l}\exists u,v\leqslant s\big[\mathsf{term}(u)\ \wedge\ \mathsf{term}(v)\\ \wedge\big([s]_i=\ulcorner(u=v)\urcorner\vee[s]_i=\ulcorner(u<v)\urcorner\big)\big]\\ \vee\exists j,k<i\ \big[[s]_i=\ulcorner([s]_j\vee[s]_k)\urcorner\vee[s]_i=\ulcorner([s]_i\vee[s]_k)\urcorner\big]\\ \vee\exists j<i\ \exists k,u\leqslant s\big[\mathsf{term}(u)\wedge[s]_i=\ulcorner\exists v_k((v_k<u)\wedge[s]_j)\urcorner\big]\\ \vee\exists j<i\ \exists k,u\leqslant s\big[\mathsf{term}(u)\wedge[s]_i=\ulcorner\forall v_k(v_k<u\to[s]_j)\urcorner\big]\end{array}\right\}$$

بوده، و $\mathsf{form}_{\Delta_0}(x)$ برابر فرمول $\exists s\ \mathsf{formseq}_{\Delta_0}(s^\frown[x])$ است. $\mathsf{form}_{\Sigma_۰}(x),\mathsf{form}_{\Pi_۰}(x)$ هر دو نمادهایی دیگر برای فرمول $\mathsf{form}_{\Delta_0}(x)$ هستند. برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\mathsf{formseq}_{\Sigma_{n+۱}}$ فرمول

$$\forall i<lh(s)\Big[\big(\mathsf{formseq}_{\Pi_n}([s]_j)\wedge i=۰\big)\vee\big(i>۰\wedge\exists k\leqslant s([s]_i=\ulcorner\exists v_k[s]_{i-۱}\urcorner)\big)\Big]$$

و $\mathsf{formseq}_{\Pi_{n+1}}$ فرمول

$$\forall i < lh(s)\Big[\big(\mathsf{formseq}_{\Sigma_n}([s]_j) \wedge i = 0\big) \vee \big(i > 0 \wedge \exists k \leqslant s([s]_i = \ulcorner \forall v_k [s]_{i-1} \urcorner)\big)\Big]$$

است. در آخر $\mathsf{form}_{\Sigma_{n+1}}(x)$، $\mathsf{form}_{\Pi_{n+1}}(x)$ به ترتیب فرمول‌های $\exists s\ \mathsf{formseq}_{\Sigma_{n+1}}(s \frown [x]))$ و $\exists s\ \mathsf{formseq}_{\Pi_{n+1}}(s \frown [x]))$ هستند.

تعریف ۹.۰.۱. فرمول $\mathsf{valseq}(y, s, t)$ برابر

$$\mathsf{termseq}(s) \wedge [lh(t) = lh(s)] \wedge$$

$$\forall i < lh(s) \left\{ \begin{array}{l} ([s]_i = \ulcorner 0 \urcorner \wedge [t]_i = 0) \vee \\ ([s]_i = \ulcorner 1 \urcorner \wedge [t]_i = 1) \vee \\ \exists j \leqslant s\ ([s]_i = \ulcorner v_j \urcorner \wedge [t]_j = [y]_j) \vee \\ \exists j, k < i\ \big([s]_i = \ulcorner ([s]_i + [s]_k) \urcorner \wedge [t]_i = [t]_i + [t]_k\big) \vee \\ \exists j, k < i\ \big([s]_i = \ulcorner ([s]_i \cdot [s]_k) \urcorner \wedge [t]_i = [t]_i \cdot [t]_k\big) \end{array} \right\}$$

است و فرمول $\mathsf{val}(x, y) = z$ برابر

$$\exists s, t\ \big[\mathsf{valseq}(y, s \frown [x], t \frown [z]) \vee (\neg \mathsf{term}(x) \wedge z = 0)\big]$$

است، بدین معنی که $\mathsf{val}(x, y) = z$ زمانی برقرار است که x عدد گودل یک ترم بوده و z ارزش ترم است درحالی که متغییر v_0 ارزش $[y]_0$ را دارد، v_1 ارزش $[y]_1$ را دارد و .... توجه کنید که برای $i \geq lh(y)$، $[y_i] = 0$. بنابراین می‌توانیم انتظار داشته باشیم که $\mathsf{val}(x, y)$ یک تابع خوش تعریف باشد.

تعریف ۱۰.۰.۱. فرمول $\mathsf{Satseq}_{\Delta_0}(s, t)$ برابر

$$\mathsf{formseq}_{\Delta_0}(s) \wedge$$

$$\begin{aligned}
&\forall l < lh(t)\ \exists i, z, w \leq t\ \Big[[t]_l = \langle i, z, w\rangle \wedge i < lh(s)\ \wedge\ w \leq ۱ \wedge \\
&\Big[\{\exists u, u' \leq s\big(\mathsf{term}(u) \wedge \mathsf{term}(u') \wedge [s]_i = \ulcorner(u = u')\urcorner \wedge \\
&\quad \big[w = ۱ \leftrightarrow \mathsf{val}(u, z) = \mathsf{val}(u', z)\big]\big)\} \\
&\vee \{\exists u, u' \leq s\big(\mathsf{term}(u)\ \wedge\ \mathsf{term}(u')\ \wedge\ [s]_i = \ulcorner(u < u')\urcorner \wedge \\
&\quad \big(w = ۱ \leftrightarrow \mathsf{val}(u, z) < \mathsf{val}(u', z)\big)\big)\big)\} \\
&\vee \{\exists j, k < i\big([s]_i = \ulcorner([s]_j\ \wedge\ [s]_k)\urcorner \wedge \\
&\exists l_۱, l_۲ < l\quad \exists w_۱, w_۲ \leq ۱\big([t]_{l_۱} = \langle j, z, w_۱\rangle\ \wedge\ [t]_{l_۲} = \langle k, z, w_۲\rangle \\
&\qquad\quad \wedge\ \big(w = ۱ \leftrightarrow w_۱ = ۱\ \wedge\ w_۲ = ۱\big)\big)\big)\} \\
&\vee \{\exists j, k < i\ \ \big([s]_i = \ulcorner([s]_j\ \vee\ [s]_k)\urcorner \wedge \\
&\exists l_۱, l_۲ < l\quad \exists w_۱, w_۲ \leq ۱\ \big([t]_{l_۱} = \langle j, z, w_۱\rangle\ \wedge\ [t]_{l_۲} = \langle k, z, w_۲\rangle \\
&\qquad\quad \wedge\ \big(w = ۱ \leftrightarrow w_۱ = ۱\ \vee\ w_۲ = ۱\big)\big)\big)\} \\
&\vee \{\exists j, i\ \ \big([s]_i = \ulcorner\neg[s]_j\urcorner \wedge \\
&\exists l_۱ < l\quad \exists w_۱ \leq ۱\ \big([t]_{l_۱} = \langle j, z, w_۱\rangle\ \wedge\ \big(w = ۱ \leftrightarrow w_۱ = ۰\big)\big)\big)\} \\
&\vee \{\exists j < i\ \ \exists k, u \leq s\ \big(\mathsf{term}(u)\ \wedge\ [s]_i = \ulcorner\exists v_k\big((v_k < u)\ \wedge\ [s]_j\big)\urcorner \wedge \\
&\forall\, r < \mathsf{val}(u, z)\ \ \exists l_۱ < l\ \ \exists w_۱ \leq ۱\ ([t]_{l_۱} = \langle j, z[r/k], w_۱\rangle) \wedge \\
&\wedge \big(w = ۱ \leftrightarrow\ \exists r < \mathsf{val}(u, z)\ \ \exists l_۱ < l([t]_{l_۱} = \langle j, z[r/k], ۱\rangle)\big)\big)\} \\
&\vee \{\exists j < i\ \ \exists k, u \leq s\ \big(\mathsf{term}(u)\ \wedge\ [s]_i = \ulcorner\forall v_k\big(v_k < u \rightarrow [s]_j\big)\urcorner \wedge \\
&\forall\, r < val(u, z)\ \ \exists l_۱ < l\ \ \exists w_۱ \leq ۱\ ([t]_{l_۱} = \langle j, z[r/k], w_۱\rangle) \\
&\wedge\big(w = ۱ \leftrightarrow \exists r < \mathsf{val}(u, z)\ \ \exists l_۱ < l\ ([t]_{l_۱} = \langle j, z[r/k], ۱\rangle)\big)\big)\big)\}\Big]\Big]
\end{aligned}$$

بوده و $\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(x, y)$ برابر فرمول زیر است:

$$\exists s, t\ [\mathsf{Satseq}_{\Delta_0}(s^\frown[x], z)\ \ \wedge\ \ \exists l < lh(t)\ ([t]_l = \langle lh(s), y, ۱\rangle)].$$

در فرمول $\mathsf{Satseq}_{\Delta_0}(s, t)$، t به عنوان کد برای دنباله‌ای از سه تایی $\langle i, z, w\rangle$ در نظر گرفته شده جایی که $i < lh(s)$ اندیسی برای دنباله کد شده توسط s است و w یک ارزش راستی است ($w = 0$ برای

نادرستی و $w=1$ برای درستی) از فرمول $[s]_i$ وقتی که متغییر های $v_۰, v_۱, \cdots$ توسط $[z]_۰, [z]_۱, \cdots$ تعبیر شده‌اند. چون $\mathsf{val}(u,z)$، $\mathsf{term}(u)$ و $\mathsf{formseq}_{\Delta_0}(s)$ همه بازگشتی هستند پس $\mathsf{Satseq}_{\Delta_0}(s,t)$، $\Delta_۱$ فرمول است و بنابراین $\mathsf{Sat}_{\Delta 0}(x,y)$، $\Sigma_۱$ فرمول است.

تعریف ۱۱.۰.۱. فرمول $\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ $s,t\ determins$ عبارت است از:

$$\mathsf{Satseq}_{\Delta 0}(s,t)\ \wedge\ \exists l<lh(t)\ \ \exists i<lh(s)\ \ \exists w\leq ۱([s]_i=x\ \wedge\ [t]_l=\langle i,y,w\rangle).$$

$\mathsf{sat}_{\Sigma_{n+۱}}(x,y)$، توسط $\Sigma_{n+۱}$ فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&\mathsf{form}_{\Sigma_{n+۱}}(x)\wedge\exists s,t\ [lh(t)=lh(s)>۰\ \wedge\ \mathsf{formseq}_{\Sigma_{n+۱}}(s)\ \wedge\ [s]_{lh(s)-۱}=x\ \wedge\\ &\quad [t]_{lh(t)-۱}=y\ \wedge\ \forall i<lh(s)\ \big(i>۰\longrightarrow\\ &\quad \exists k\leq s\ \exists z\leq t\ ([s]_i=\ulcorner\exists v_k[s]_{i-۱}\urcorner\ \wedge\ [t]_{i-۱}=[t]_i[z/k])\big)\ \wedge\ \mathsf{sat}_{\Pi_n}([s]_۰,[t]_۰)]\end{aligned}$$

و $\mathsf{sat}_{\Pi_{n+۱}}(x,y)$، برابر $\Pi_{n+۱}$ فرمول زیر است:

$$\begin{aligned}&\mathsf{form}_{\Pi_{n+۱}(x)}\ \wedge\ \forall s,t\ \Big[\Big(lh(t)=lh(s)>۰\ \wedge\ \mathsf{formseq}_{\Pi_{n+۱}}(s)\wedge\\ &\quad [s]_{lh(s)-۱}=x\ \wedge\ [t]_{lh(t)-۱}=y\wedge\\ &\forall i<lh(s)\ \big(i>۰\longrightarrow\exists k\leq s\ \exists z\leq t\ ([s]_i=\ulcorner\forall v_k[s]_{i-۱}\urcorner\ \wedge\ [t]_{i-۱}=[t]_i[z/k])\big)\Big)\\ &\quad\wedge\ \mathsf{sat}_{\Sigma_n}([s]_۰,[t]_۰)\Big].\end{aligned}$$

قضیه ۱۲.۰.۱. *برای هر $\Delta_۰$ فرمول $\theta(v_۰,\ldots,v_{n-۱})$ با تنها متغییرهای آزاد $v_۰,\cdots,v_{n-۱}$ داریم:*

$$\forall x_۰,\ldots,x_{n-۱},y\ [\theta(v_۰,\ldots,v_{n-۱})\leftrightarrow sat_{\Delta_۰}(\ulcorner\theta(v_۰,\ldots,v_{n-۱})\urcorner,[x_۰,\ldots,x_{n-۱}]\frown y)]$$

به‌طور مشابه برای هر $\theta\in\Sigma_n$ و $\psi\in\Pi_n$ داریم:

$$\forall x_۰,\ldots,x_{k-۱},y\ (sat\Sigma_n(\ulcorner\theta(v_۰,\ldots,v_{k-۱})\urcorner,[x_۰,\ldots,x_{k-۱}]^\frown y)\longleftrightarrow\theta(x_۰,\ldots,x_{k-۱}))$$

$$\forall x_۰,\ldots,x_{k-۱},y\ (sat\Pi_n(\ulcorner\psi(v_۰,\ldots,v_{k-۱})\urcorner,[x_۰,\ldots,x_{k-۱}]^\frown y)\longleftrightarrow\psi(x_۰,\ldots,x_{k-۱}))$$

و نیز برای هر $n\geq ۱$، $\mathsf{sat}_{\Sigma_n}(x,y)$، یک Σ_nــ فرمول و $\mathsf{sat}_{\Pi_n}(x,y)$، یک Π_nــ فرمول است.

اثبات قضیه بالا را می‌توان در مرجع [۹] دید.

فصل ۲

اثبات‌های دیگری برای قضیه ناتمامیت

در این فصل اثبات کوتلارسکی[۱] [۱۵] برای قضیه دوم ناتمامیت به بیان نظریه برهانی، بدون استفاده از قضیه تمامیت حسابی‌سازی شده، ارایه می‌شود. همچنین اثبات جدیدی برای قضیه قدیمی سلسله مراتب حسابی، بدون استفاده از لم قطری‌سازی، ارایه می‌شود.

۱.۲ قضیه دوم ناتمامیت

فرض کنید T یک نظریه سازگار بازگشتی مقدماتی برای حساب و شامل حساب پئانو باشد. با یادآوری «شرایط اثبات پذیری» شروع می‌کنیم ([۳، ۷]):

$D۱.\quad T \vdash \varphi \Longrightarrow T \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$

$D۲.\quad T \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \longrightarrow \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$

$D۳.\quad T \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \& \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \longrightarrow \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner).$

توجه کنید که شرط مشابه $D۳$ برای هر قاعده استنتاج برقرار است. همچنین لازم است آنچه را که $\Sigma_۱$ـ تمامیت T گفته می‌شود به صورت زیر فرمول بندی کنیم:

اگر χ یک $\Delta_۰$ فرمول باشد، آنگاه $T \vdash (\exists b \chi(b)) \longrightarrow \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \exists b \chi(b) \urcorner)$.

برای سهولت، فرمول $\neg \mathsf{Pr}_T(\neg \varrho)$ را به صورت $\mathsf{Con}_T(\varrho)$ خلاصه می‌کنیم. فرض کنید $\Gamma(x)$ فرمول زیر باشد:

$$(\forall \varphi, u \leq x)\Big(\varphi \in \Delta_۰ \to \big[\mathsf{Pr}_T\big(\forall w \neg \varphi(\overline{u}, w)\big) \vee \exists w \mathsf{Pr}_T\big(\varphi(\overline{u}, \overline{w})\big)\big]\Big).$$

از این رو $\Gamma(x)$یک بیان صوری برای ωـ تمامیت T است. اما این ωـ تمامیت به $x \leq \varphi, u$ و $\varphi \in \Delta_۰$ محدود شده است. برای $n \in \mathbb{N}$ قرار دهید: $\overline{n} = \underbrace{s \cdots s}_{n\text{بار}}(۰)$.

[۱] H. Kotlarski

لم ۲.۱.۱. *فرض کنید $a \in \mathbb{N}$ و $\varphi_0(\overline{u_0}, w), \cdots, \varphi_{r-1}(\overline{u_{r-1}}, w)$ یک دنباله از جایگذاری‌های $\varphi(\overline{u}, w)$ با $\varphi, u \leq a$ و $\varphi \in \Delta_0$ باشد. $\mathsf{Pr}_T\big(\forall w \neg\varphi_i(\overline{u_i}, w)\big)$ را با γ_i^0 و $\exists w \mathsf{Pr}_T\big(\varphi_i(\overline{u_i}, \overline{w})\big)$ را با γ_i^1 نشان می‌دهیم. همچنین 2^r را مجموعه $\{\langle b_0, b_1, \cdots, b_{r-1}\rangle | b_i \in \{0, 1\}\}$ در نظر می‌گیریم. با این مفروضات*

$$T \vdash \Gamma(\overline{a}) \equiv \bigvee_{b\in 2^r} \bigwedge_{i<r} \gamma_i^{b_i}.$$

برهان. با توجه به مفروضات داریم:

$$\Gamma(\overline{a}) \equiv \bigwedge_{i<r} \bigwedge_{u_i \leq a} (\gamma_i^0 \vee \gamma_i^1) \equiv (\gamma_0^0 \vee \gamma_0^1) \wedge (\gamma_1^0 \vee \gamma_1^1) \wedge \cdots \wedge (\gamma_{r-1}^0 \vee \gamma_{r-1}^1)$$

$$\equiv (\gamma_0^0 \wedge \gamma_1^0 \wedge \cdots \wedge \gamma_{r-1}^0) \vee \cdots \vee (\gamma_0^{b_i} \wedge \gamma_1^{b_i} \wedge \cdots \wedge \gamma_{r-1}^{b_i}) \vee \cdots \vee (\gamma_0^1 \wedge \gamma_1^1 \wedge \cdots \wedge \gamma_{r-1}^1)$$

که در آن $b_i \in \{0, 1\}$. پس با در نظر گرفتن $b \in 2^r$ مناسب می‌توان نوشت:

$$\Gamma(\overline{a}) \equiv \bigvee_{b\in 2^r} \bigwedge_{i<r} \gamma_i^{b_i}.$$

□

لم ۲.۱.۲. *قرار دهید ξ یک Σ_1 جمله باشد. در اینصورت برای هر $j \leq r$، $T+\xi$ جمله زیر را اثبات می‌کند:*

$$(\xi \wedge \bigwedge_{i<j} \gamma_i^0) \quad \vee \quad \bigvee_{b\in 2^j} \mathsf{Con}_T(\xi \wedge \bigwedge_{i<j} \gamma_i^{b_i}) \qquad (*)_j.$$

برهان. با استقرا روی j: برای $j = 0$ چیزی برای اثبات وجود ندارد. قرار دهید $j = 1$. اگر داشته باشیم $\mathsf{Pr}_T\big(\forall w \neg\varphi_0(\overline{u_0}, w)\big)$، یعنی γ_0، آنگاه قسمت چپ ترکیب فصلی $(*)_1$ برقرار می‌شود. در

غیر اینصورت داریم:

$$\xi \wedge \neg \mathsf{Pr}_T\big(\forall w \neg \varphi_\circ(\overline{u_\circ}, w)\big)$$

که همان $\xi \wedge \mathsf{Con}_T(\gamma_\circ^{1})$ است. زیرا:

$$\neg \mathsf{Pr}_T\big(\forall w \neg \varphi_\circ(\overline{u_\circ}, w)\big) \equiv \neg \mathsf{Pr}_T\Big(\neg\big(\exists w \varphi_i(\overline{u_i}, w)\big)\Big) \equiv \mathsf{Con}_T(\gamma_\circ^{1}).$$

نشان می‌دهیم در این حالت قسمت راست ترکیب فصلی $(*)_1$ برقرار می‌شود.
اگر داشته باشیم $\neg \mathsf{Con}_T(\xi \wedge \gamma_\circ^{1})$ (فرض خلف)، پس داریم $\mathsf{Pr}_T(\xi \to \neg \gamma_\circ^{1})$. زیرا:

$$\neg \mathsf{Con}_T(\xi \wedge \gamma_\circ^{1}) \equiv \mathsf{Pr}_T(\neg \xi \vee \neg \gamma_\circ^{1}) \equiv \mathsf{Pr}_T(\xi \to \neg \gamma_\circ^{1}).$$

همچنین داریم $\mathsf{Pr}_T(\xi)$، چون که در واقع ξ، Σ_1 است، از این رو طبق Σ_1ـ تمامیت اثبات پذیری، درستی‌اش، دلالت بر اثبات‌پذیری‌اش می‌کند. پس طبق D_3 داریم $\mathsf{Pr}_T(\neg \gamma_\circ^{1})$، یعنی $\neg \mathsf{Con}_T(\gamma_\circ^{1})$، که تناقض است.

حال با فرض برقراری $(*)_j$، درستی $(*)_{j+1}$ را اثبات می‌کنیم. ابتدا $\xi \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i<j} \gamma_i^\circ$ را فرض کرده و آن را با ξ' نشان می‌دهیم. حال اگر داشته باشیم:

$$\mathsf{Pr}_T\big(\forall w \neg \varphi_j(\overline{u_j}, w)\big)$$

آنگاه قسمت چپ ترکیب فصلی $(*)_{j+1}$ برقرار می‌شود. در غیر اینصورت داریم:

$$\mathsf{Con}_T\big(\exists w \varphi_j(\overline{u_j}, w)\big)$$

و دقیقا مشابه گام اول خواهیم داشت: $\mathsf{Con}_T(\xi' \wedge \gamma_j^{1})$. زیرا در غیر اینصورت:

$$\neg \mathsf{Con}_T(\xi' \wedge \gamma_j^{1}) \equiv \mathsf{Pr}_T(\neg \xi' \vee \neg \gamma_j^{1}) \equiv \mathsf{Pr}_T(\xi' \to \neg \gamma_j^{1})$$

و از $\mathsf{Pr}_T(\xi')$، طبق $D_۳$ خواهیم داشت $\mathsf{Pr}_T(\neg\gamma_j^۱)$، یعنی $\neg\mathsf{Con}_T(\gamma_j^۱)$، که تناقض است. بنابراین قسمت راست ترکیب فصلی $(*)_{j+۱}$ برقرار می‌شود.

حال قسمت راست ترکیب فصلی $(*)_j$ را فرض کرده و یک $b \in ۲^j$ دلخواه را در نظر می‌گیریم. پس داریم $\mathsf{Con}_T(\xi \wedge \bigwedge_{i<j} \gamma_i^{b_i})$، و آن را با $\mathsf{Con}_T(\xi')$ نشان می‌دهیم. دو حالت زیر را داریم:

۱. اگر $\mathsf{Pr}_T\big(\xi' \rightarrow \forall w \neg\varphi_j(\overline{u_j}, w)\big)$، آنگاه داریم: $\mathsf{Con}_T\big(\xi' \wedge \forall w \neg\varphi_j(\overline{u_j}, w)\big)$. زیرا در غیر این‌صورت $\mathsf{Pr}_T\big(\xi' \rightarrow \neg\forall w \neg\varphi_j(\overline{u_j}, w)\big)$. پس طبق $D_۳$ خواهیم داشت $\neg\mathsf{Con}_T(\xi')$، که تناقض است. در نتیجه $\mathsf{Con}_T(\xi' \wedge \gamma_j^۰)$ برقرار می‌شود که قسمت راست ترکیب فصلی $(*)_{j+۱}$ برای شاخه $b^\frown\langle ۰ \rangle$ است.

۲. اگر $\neg\mathsf{Pr}_T\big(\xi' \rightarrow \forall w \neg\varphi_j(\overline{u_j}, w)\big)$، آنگاه داریم: $\mathsf{Con}_T\big(\xi' \wedge \exists w \varphi_j(\overline{u_j}, w)\big)$.
زیرا در غیر اینصورت:

$$\neg\mathsf{Con}_T\big(\xi' \wedge \exists w \varphi_j(\overline{u_j}, w)\big) \equiv \mathsf{Pr}_T\big(\neg\xi' \vee \neg\exists w \varphi_j(\overline{u_j}, w)\big)$$

$$\equiv \mathsf{Pr}_T\big(\xi' \rightarrow \neg\exists w \varphi_j(\overline{u_j}, w)\big) \equiv \mathsf{Pr}_T\big(\exists w \varphi_j(\overline{u_j}, w) \rightarrow \neg\xi'\big)$$

و از طرفی طبق $\Sigma_۱$ـ تمامیت اثبات پذیری، $\mathsf{Pr}_T\big(\exists w \varphi_j(\overline{u_j}, w)\big)$. پس طبق $D_۳$، $\mathsf{Pr}_T(\neg\xi')$ را داریم که همان $\neg\mathsf{Con}_T(\xi')$ و تناقض است. پس داریم: $\mathsf{Con}_T(\xi' \wedge \gamma_j^۱)$ و قسمت راست ترکیب فصلی $(*)_{j+۱}$ با شاخه $b^\frown\langle ۱ \rangle$ برقرار می‌شود. □

در حقیقت لم ۲.۱.۲ را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

لم ۳.۱.۲. *با نمادگذاری لم ۲.۱.۲،*

$$T + \xi \vdash \Gamma(\overline{a}) \vee \mathsf{Con}_T\big(\xi \wedge \Gamma(\overline{a})\big).$$

برهان. طبق لم ۲.۱.۲ داریم:

$$.T + \xi \vdash (\xi \wedge \bigwedge_{i<j} \gamma_i^{\circ}) \vee \bigvee_{b\in ۲^j} \mathsf{Con}_T(\xi \wedge \bigwedge_{i<j} \gamma_i^{b_i})$$

در $T + \xi$ اینگونه استدلال می‌کنیم:

اگر

$$\xi \wedge \bigwedge_{i<j} \gamma_i^{\circ}$$

آنگاه $\bigwedge_{i<j} \gamma_i^{\circ}$. در نتیجه

$$.\bigvee_{b\in ۲^j} \bigwedge_{i<j} \gamma_i^{b_i}$$

پس طبق لم ۱.۱.۲ داریم:

$$.(*) \quad \Gamma(\overline{a})$$

حال اگر

$$\bigvee_{b\in ۲^j} \mathsf{Con}_T(\xi \wedge \bigwedge_{i<j} \gamma_i^{b_i})$$

آنگاه

$$.\mathsf{Con}_T\Big(\bigvee_{b\in ۲^j} (\xi \wedge \bigwedge_{i<j} \gamma_i^{b_i})\Big)$$

در نتیجه

$$.\mathsf{Con}_T(\xi \wedge \bigvee_{b\in ۲^j} \bigwedge_{i<j} \gamma_i^{b_i})$$

پس طبق لم ۱.۱.۲ داریم

$$.(**) \quad \mathsf{Con}_T\Big(\xi \wedge \Gamma(\overline{a})\Big)$$

حال از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌شود

$$.\Gamma(\overline{a}) \vee \mathsf{Con}_T\Big(\xi \wedge \Gamma(\overline{a})\Big)$$

$\square$

در زیر لم اصلی برای قضیه ناتمامیت را داریم:

لم ۴.۱.۲. *عدد طبیعی* $c = c(T)$ *وجود دارد به طوری‌که برای هر* $a \in \mathbb{N}$ *با شرط* $a \geq c$، $.T + \Gamma(\overline{a}) \vdash \neg\mathsf{Con}_T$

برهان. فرض کنید $\Psi(x,y)$ فرمولی باشد که از کران‌دار کردن سور وجودی فرمول $\Gamma(x)$ با متغیر جدید y به دست آمده باشد:

$$.(\forall \varphi, u \leq x)\Big(\varphi \in \Delta_0 \to \big[\mathsf{Pr}_T\big(\forall w \neg\varphi(\overline{u}, w)\big) \vee (\exists w < y)\mathsf{Pr}_T\big(\varphi(\overline{u}, \overline{w})\big)\big]\Big)$$

اگر بخواهیم در نظریه‌های ضعیف‌تر کار کنیم، باید مشاهده کنیم که برای هر $a \in \mathbb{N}$ داریم $T \vdash \Gamma(\overline{a}) \to \exists y \Psi(\overline{a}, y)$. در حقیقت برای $a \in \mathbb{N}$، تنها تعدادی متناهی فرمول $\varphi_0(\overline{u_0}, w), \cdots, \varphi_{r-1}(\overline{u_{r-1}}, w)$ برای در نظر گرفتن وجود دارد چون که برای a داده شده، باید داشته باشیم $r \leq (a+1)^2$. در واقع برای a، با توجه به $\varphi, u \leq a$، داریم $\varphi, u = 0$ تا $\varphi, u = a$ و در اینصورت تعداد هرکدام حداکثر $a + 1$ تا است. پس تعداد فرمول‌های $\varphi_i(\overline{u_i}, w)$، حداکثر $(a+1)^2$ است. توجه کنید که $\Psi(x,y)$، یک Σ_1 فرمول است. پس $\Psi(x,y)$ را به صورت $\exists z H(x,y,z)$ می‌توان نوشت که $H \in \Delta_0$. می‌توان این فرمول را به صورت زیر نیز نوشت:

$$.G(x, \alpha) \equiv Seq(\alpha) \wedge (lh(\alpha) = \overline{2}) \wedge H(x, \alpha_0, \alpha_1)$$

قرار دهید $c = \ulcorner G(x,y) \urcorner$. ادعا می‌کنیم که c خاصیت بیان شده در لم را دارد. برعکس فرض کنید داشته باشیم Con_T، و $a \in \mathbb{N}$ را طوری بگیرید که $a \geq c$. اگر $\Gamma(\overline{a})$ را فرض کنیم، خواهیم داشت:

(۱) $\exists b\Psi(\overline{a}, b)$.

از $\Psi(\overline{a}, b)$ نتیجه می‌شود $\exists z H(\overline{a}, b, z)$، پس

(۲) $\exists \alpha G(\overline{a}, \alpha)$.

کوچکترین $\alpha'' = \langle b'', z''\rangle$ در (۲) را انتخاب می‌کنیم. $\varphi = G(x, \alpha)$ و $u = a$ را در $\Psi(\overline{a}, b'')$ جایگزین می‌کنیم. در اینصورت داریم:

(۳) $\mathsf{Pr}_T\big(\forall\alpha\neg G(\overline{a}, \alpha)\big) \vee (\exists\alpha' < b'')\mathsf{Pr}_T\big(G(\overline{a}, \overline{\alpha'})\big)$.

طبق $\exists\alpha G(\overline{a}, \alpha)$ و Σ_1ـ تمامیت اثبات پذیری T داریم $\mathsf{Pr}_T\big(\exists\alpha G(\overline{a}, \overline{\alpha})\big)$، بنابراین طبق Con_T، قسمت چپ ترکیب فصلی (۳) رد می‌شود. پس قسمت راست آن برقرار است. یعنی می‌توانیم از Con_T نتیجه بگیریم که:

(۴) $(\exists\alpha' < b'')\mathsf{Pr}_T\big(G(\overline{a}, \overline{\alpha'})\big)$.

پس داریم:

(۵) $(\exists\alpha' < b'')G(\overline{a}, \alpha')$.

چون اگر (۵) نادرست باشد، آنگاه طبق Σ_1 ـ تمامیت اثبات پذیری خواهیم داشت:

(۶) $\mathsf{Pr}_T\big((\forall\alpha' < \overline{b''}\neg G(\overline{a}, \alpha')\big)$.

اما از (۴) و (شرایط اثبات پذیری برای) قاعده وضع مقدم داریم:

(۷) $\mathsf{Pr}_T\big((\exists\alpha' < \overline{b''})G(\overline{a}, \alpha')\big)$.

پس اگر (۵) نادرست باشد، آنگاه نمی‌توانیم Con_T را داشته باشیم. فوراً از (۵) نتیجه می‌گیریم $(\exists\alpha' < \alpha'')G(\overline{a}, \alpha')$ و این نشان می‌دهد که α'' نمی‌تواند کوچکترین عنصر در (۲) باشد. با این تناقض اثبات تمام می‌شود. $\square$

لم‌های ۳.۱.۲ و ۴.۱.۲ در بالا فوراً شکل صوری شده دومین قضیه ناتمامیت گودل را نتیجه می‌دهند.

قضیه ۵.۱.۲. $T \vdash \mathsf{Con}_T \to \neg\mathsf{Pr}_T(\mathsf{Con}_T)$. *در واقع اگر ξ یک Σ_1 جمله باشد، آنگاه* $T \vdash (\xi \wedge \mathsf{Con}_T) \to \neg\mathsf{Pr}_T(\xi \to \mathsf{Con}_T)$.

برهان. طبق لم ۳.۱.۲ داریم

$$T + \xi \vdash \Gamma(\overline{a}) \vee \mathsf{Con}_T\big(\xi \wedge \Gamma(\overline{a})\big).$$

پس طبق لم ۴.۱.۲ داریم

$$T + \xi \vdash \neg\mathsf{Con}_T \vee \mathsf{Con}_T\big(\xi \wedge \neg\mathsf{Con}_T\big).$$

در نتیجه

$$T \vdash \xi \longrightarrow \neg\mathsf{Con}_T \vee \mathsf{Con}_T(\xi \wedge \neg\mathsf{Con}_T).$$

پس

$$T \vdash \neg\xi \vee \neg\mathsf{Con}_T \vee \mathsf{Con}_T(\xi \wedge \neg\mathsf{Con}_T).$$

در اینصورت داریم

$$T \vdash \neg(\xi \wedge \mathsf{Con}_T) \vee \mathsf{Con}_T(\xi \wedge \neg\mathsf{Con}_T)$$

که همان

$$T \vdash (\xi \wedge \mathsf{Con}_T) \to \neg\mathsf{Pr}_T(\xi \to \mathsf{Con}_T)$$

است. □

باید توجه کرد که صورت معمول قضیه دوم ناتمامیت از قضیه ۵.۱.۲ نتیجه می‌شود. در واقع، اگر T سازگار باشد و $T \vdash \mathsf{Con}_T$، طبق $D2$ باید $T \vdash \mathsf{Pr}_T(\mathsf{Con}_T)$. اما از قضیه بالا داریم $T \vdash \neg\mathsf{Pr}_T(\mathsf{Con}_T)$ و T ناسازگار می‌شود. از این رو داریم:

نتیجه ۶.۱.۲. *اگر T سازگار باشد آنگاه T، Con_T را اثبات نمی‌کند.*

به علاوه، T بیان صوری شده زیر از قضیه اول ناتمامیت گودل را نیز اثبات می‌کند: «اگر T، نسبت به Δ_0ــ فرمول ها ωــ سازگار باشد، آنگاه ناتمام است».

قضیه ۷.۱.۲. *نظریه T، استلزام زیر را اثبات می‌کند: اگر*

$$(\forall\varphi, u)\Big(\big(\varphi \in \Delta_0 \wedge \forall w \mathsf{Pr}_T(\neg\varphi(\overline{u}, \overline{w}))\big) \to \neg\mathsf{Pr}_T(\exists x \varphi(\overline{u}, x))\Big)$$

آنگاه

$$(\exists\varphi \in \Delta_0)\exists u\Big(\neg\mathsf{Pr}_T\big(\exists x\varphi(\overline{u}, x)\big) \wedge \neg\mathsf{Pr}_T\big(\neg\exists x\varphi(\overline{u}, x)\big)\Big).$$

برهان. ابتدا توجه کنید که فرض استلزام، Con_T را نتیجه می‌دهد (با جایگذاری فرمول $w \neq w$ بجای φ). فرض کنید $G(x, \alpha)$ و a همانهایی باشند که در اثبات لم ۴.۱.۲ داشتیم. ثابت می‌کنیم که $T \vdash \forall w \mathsf{Pr}_T\big(\neg G(\overline{a}, \overline{w})\big)$: در حقیقت $G(x, \alpha)$، یک فرمول Δ_0 است، و داریم: اگر $G(\overline{a}, \overline{w})$، آنگاه $\mathsf{Pr}_T(G(\overline{a}, \overline{w}))$ و اگر $\neg G(\overline{a}, \overline{w})$، آنگاه $\mathsf{Pr}_T\big(\neg G(\overline{a}, \overline{w})\big)$. پس اگر $\neg\mathsf{Pr}_T\big(\neg G(\overline{a}, \overline{w})\big)$، در اینصورت داریم $G(\overline{a}, \overline{w})$ و در نتیجه $\mathsf{Pr}_T\big(G(\overline{a}, \overline{w})\big)$ برقرار می‌شود، و با به کار بردن Con_T نتیجه می‌گیریم $G(\overline{a}, \overline{w})$، پس $\exists w G(\overline{a}, \overline{w})$ و طبق برهان لم ۴.۱.۲ داریم $\neg\mathsf{Con}_T$.

طبق فرض استلزام داریم $\neg\mathsf{Pr}_T\big(\exists w G(\overline{a}, w)\big)$ یعنی $\neg\mathsf{Pr}_T\big(\Gamma(\overline{a})\big)$ پس $\neg\mathsf{Pr}_T(\neg\mathsf{Con}_T)$. زیرا به روشنی داریم $\neg\mathsf{Con}_T \to \Gamma(\overline{a})$. در واقع از ناسازگاری، اثبات‌پذیری هر فرمول نتیجه می‌شود. در اینصورت داریم $\mathsf{Pr}_T(\neg\mathsf{Con}) \to \mathsf{Pr}_T\big(\Gamma(\overline{a})\big)$ که با $\neg\mathsf{Pr}_T\big(\Gamma(\overline{a})\big) \to \neg\mathsf{Pr}_T(\neg\mathsf{Con}_T)$ معادل است. همچنین، از طرف دیگر طبق قضیه ۵.۱.۲ داریم $\neg\mathsf{Pr}_T(\mathsf{Con}_T)$ و اثبات تمام می‌شود. در واقع چون $\neg\mathsf{Con}_T$، یک فرمول Σ_1 است، پس می‌توان آن را بصورت $\exists x\varphi$ نوشت که در آن $\varphi \in \Delta_0$ است و با در نظر گرفتن φ به تناقض می‌رسیم. □

نتیجه این که اگر T در مدل استاندارد درست باشد، آنگاه ناتمام است. به طوری‌که می‌دانیم، فرض اینکه T در مدل استاندارد درست باشد، طبق قضیه راسر، اینجا مورد نیاز نیست.

۲.۲ قضیه سلسله مراتب حسابی

فرض کنید $\Phi_n(x,y)$ فرمول زیر باشد:

$$(\forall\varphi, u \leq x)\Big(\big(\varphi \in \Sigma_n \wedge \exists w\, \mathbf{Tr}_{\Sigma_n}\big(\varphi(\overline{u},\overline{w})\big)\big) \to (\exists v < y)\mathbf{Tr}_{\Sigma_n}\big(\varphi(\overline{u},\overline{v})\big)\Big).$$

در اینجا $\mathbf{Tr}_{\Sigma_n}$ محمول درستی برای Σ_n فرمول‌هاست. در حقیقت $\mathbf{Tr}_{\Sigma_n}(x) \equiv \exists y\, \mathsf{Sat}_{\Sigma_n}(x,y)$ (در تعریف ۱.۰.۱۱). برای $n = ۰$ داریم $\mathbf{Tr}_{\Delta_۰}(x) \equiv \exists y\, \mathsf{Sat}_{\Delta_۰}(x,y)$، و این فرمول در [۱۳] استفاده شده است و در [۹] نمایش کمی متفاوت داشته است.

قضیه ۱.۲.۲. *فرض کنید T یک نظریه بازگشتی مقدماتی برای حساب و شامل حساب پئانو باشد. اگر $n > ۰$ و H یک Π_n فرمول باشد، آنگاه T اثبات می‌کند که $\mathbf{Tr}_{\Sigma_n}$ هم ارز با H نیست.*

برهان. ادعا می‌کنیم که T اثبات می‌کند که $\Phi_n(x,y)$ هم ارز با هیچ Σ_n فرمولی نیست. پس فرض کنید (فرض خلف) $\Phi_n(x,y) \equiv H(x,y)$ برای Σ_n فرمول H برقرار باشد. ما در

$$T + \forall x,y\,\big(\Phi_n(x,y) \equiv H(x,y)\big)$$

استدلال می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم:

$$(*) \quad \forall x\, \exists y\, H(x,y).$$

با استقرا روی x، $(*)$ را اثبات می‌کنیم:

لیست فرمول‌ها را با $\varphi_۰, \varphi_۱, \cdots, \varphi_n, \cdots$ نشان می‌دهیم که در آن n، کد φ_n است.

حال برای $x = ۰$، با انتخاب y به صورت زیر، $H(۰,y)$ برقرار می‌شود:

$$y = \begin{cases} w & \text{if } \varphi_۰ \in \Sigma_n \wedge \exists w\, \mathbf{Tr}_{\Sigma_n}\big(\varphi(۰,\overline{w})\big) \\ b & \text{if } \varphi_۰ \notin \Sigma_n \vee \forall w\, \neg\mathbf{Tr}_{\Sigma_n}\big(\varphi(۰,\overline{w})\big) \end{cases}.$$

که در آن $b \in \mathbb{N}$، هر عدد دلخواهی می‌تواند باشد. حال فرض کنید برای $x = \alpha$، حکم برقرار باشد یعنی $\exists y H(\alpha, y)$. نشان می‌دهیم برای $x = \alpha + ۱$ داریم: $\exists z H(\alpha + ۱, z)$. چهار حالت زیر را داریم:

۱. $\varphi, u \leqslant \alpha$.

در این حالت بنا به فرض استقرا قرار می‌دهیم $z = y$.

۲. $\varphi = \alpha + ۱, u \leqslant \alpha$.

فرض کنید عناصر $w_۰, w_۱, \cdots, w_{r-۱}$ چنان باشند که

$$\varphi_{\alpha+۱}(۰, \overline{w_۰}), \cdots, \varphi_{\alpha+۱}(\overline{u_{r-۱}}, \overline{w_{r-۱}})$$

دنباله تمام جایگذاری‌های $\varphi(\overline{u}, \overline{w})$ با شرایط $u \leq \alpha$، $\varphi_{\alpha+۱} \in \Sigma_n$ و $\mathbf{Tr}_{\Sigma_n}\big(\varphi_{\alpha+۱}(\overline{u_i}, \overline{w_i})\big)$ باشد. در اینصورت قرار می‌دهیم:

$$.z = max\{w_۰, w_۱, \cdots, w_{r-۱}\} + ۱$$

۳. $\varphi \leq \alpha, u = \alpha + ۱$.

در این حالت نیز فرض کنید عناصر $w_۰, w_۱, \cdots, w_{r-۱}$ چنان باشند که

$$\varphi_۰(\overline{\alpha + ۱}, \overline{w_۰}), \cdots, \varphi_{r-۱}(\overline{\alpha + ۱}, \overline{w_{r-۱}})$$

دنباله تمام جایگذاری‌های $\varphi(\overline{u}, \overline{w})$ با شرایط $u = \alpha + ۱, \varphi \leq \alpha$، $\varphi_i \in \Sigma_n$ و $\mathbf{Tr}_{\Sigma_n}\big(\varphi_i(\overline{\alpha + ۱}, \overline{w_i})\big)$ باشد. در اینصورت نیز قرار می‌دهیم:

$$.z = max\{w_۰, w_۱, \cdots, w_{r-۱}\} + ۱$$

۴. $\varphi = \alpha + ۱, u = \alpha + ۱$.

در این حالت اگر داشته باشیم:

$$\varphi_{\alpha+1} \in \Sigma_n \wedge \exists w \mathbf{Tr}_{\Sigma_n}\big(\varphi_{\alpha+1}(\overline{\alpha+1}, \overline{w})\big)$$

آنگاه قرار می‌دهیم: $z = w + 1$، و در غیر اینصورت z را برابر y می‌گیریم و بدینصورت $(*)$ اثبات می‌شود.

حال قرار می‌دهیم $a = \ulcorner H(x,y) \urcorner$. بنابراین $\exists b H(\overline{a}, b)$ برقرار است. کوچکترین b را ثابت بگیرید. $a = u = \varphi$ را در Φ_n جایگزین می‌کنیم و طبق $H(a,b)$ (یعنی $\Phi_n(a,b)$) نتیجه می‌گیریم که $w < b$ چنان وجود دارد که $\mathbf{Tr}_{\Sigma_n}\big(H(a,w)\big)$ برقرار است. این متناقض با کمینه بودن b است. از این رو فرض خلف باطل شده و درنتیجه $\neg(\Phi_n \equiv H)$ در T اثبات پذیر است. نتیجه اینکه فرمول $\exists w \mathbf{Tr}_{\Sigma_n}\big(\varphi(\overline{u}, \overline{w})\big)$ هم ارز با هیچ Π_n فرمول نیست. اما با $\mathbf{Tr}_{\Sigma_n}\big(\exists w \varphi(\overline{u}, w)\big)$ هم ارز است. پس $\mathbf{Tr}_{\Sigma_n}$ هم نمی‌تواند با هیچ Π_n فرمولی هم ارز باشد. □

طبق معمول این استدلال نیز تصمیم ناپذیری حساب را تصدیق می‌کند؛

نتیجه ۲.۲.۲. *مجموعه اعداد طبیعی توصیف شده توسط فرمول* Pr_{PA}، *بازگشتی نیست.*

برهان. طبق قضیه‌ی ۱.۲.۲، زیر مجموعه $\mathbb{N}$، توصیف شده توسط فرمول $\exists w \mathbf{Tr}_{\Delta_0}\big(\varphi(\overline{u}, \overline{w})\big)$، بازگشتی (یعنی Δ_1) نیست. اما به وضوح این مجموعه با اراکل مجموعه همه قضایا بازگشتی است (بخاطر Σ_1 ـ کامل بودن نظریه). پس مجموعه همه قضایای PA نمی‌تواند بازگشتی باشد. □

فصل ۳

قضایای ناتمامیت و پارادوکس بِری

در این فصل اثبات کیکوچی[۱] [۱۰] را بیان می‌کنیم، اما قبل از ارایه آن چند نکته تاریخی را مرور می‌کنیم: این اثبات بر اساس پارادوکس بِری[۲] است. تا جایی که می‌دانیم، وُپِنکا[۳] [۲۳] اولین فردی بود که توانست این پارادوکس را به اثباتی برای قضیه دوم ناتمامیت تبدیل کند، اگرچه مقاله‌اش مورد توجه واقع نشد. اثبات کیکوچی گسترشی از کار بولوس[۴] [۱] است.

ابتدا اثبات کیکوچی را مطرح می‌کنیم. به جای شمردن تعداد نمادهای موجود در یک فرمول با عدد گودل آن کار می‌کنیم. همچنین با فرمول‌های با پارامتر کار می‌کنیم. T را یک نظریه سازگار بازگشتی مقدماتی برای حساب و شامل حساب پئانو در نظر می‌گیریم.

گوییم یک فرمول φ با پارامتر $u \in \mathbb{N}$، عنصر $d \in \mathbb{N}$ را در T تعریف می‌کند اگر داشته باشیم: $T \vdash \varphi(\overline{u}, \overline{d}) \wedge \exists! x\varphi(\overline{u}, x)$. توجه کنید که چون طبق فرض T سازگار است، هر زوج φ, u حداکثر یک عدد d را تعریف می‌کنند. در اینصورت برای هر عدد طبیعی a حداکثر $(a+1)^2$ عدد با $\varphi, u \leq a$ تعریف می‌شوند. فرمول نظیر این مفهوم بصورت زیر است:

$$\mathsf{Pr}_T\big(\varphi(\overline{u}, \overline{d}) \wedge \exists! x\varphi(\overline{u}, x)\big)$$

که از این پس با نماد $\mathsf{Nam}(\ulcorner\varphi\urcorner, u, d)$ نشان داده خواهد شد. همچنین فرض می‌کنیم $\mathsf{Ber}(x, y)$ فرمولی بصورت زیر باشد:

$$\forall \varphi, u \leq x \,\neg\mathsf{Nam}(\ulcorner\varphi\urcorner, u, y) \wedge \forall z < y\, \exists \varphi, u \leq x\, \mathsf{Nam}(\ulcorner\varphi\urcorner, u, z).$$

$\mathsf{Ber}(x, y)$ بیان می‌کند که: هیچ فرمول $\varphi(u, .)$ با شرط $\varphi, u \leq x$ نمی‌تواند عدد y را تعریف کند و چنین y با این ویژگی کوچکترین است. نماد Ber از پارادوکس Berry می‌آید.

[۱] M. Kikuchi

[۲] Berry's paradox

[۳] Vopěnka

[۴] G. Boolos

۱.۳ قضایای ناتمامیت

قضیه ۱.۱.۳. *قضیه دوم ناتمامیت:*

۱. *(صورت اول) نظریه T دارای مدلی است که $\neg\mathsf{Con}_T$ را ارضا می‌کند، یعنی* $T \nvdash \mathsf{Con}_T$.

۲. *(صورت دوم)* $T + \mathsf{Con}_T \vdash \neg\mathsf{Pr}_T(\mathsf{Con}_T)$.

در برهان زیر هر دو صورت قضیه دوم ناتمامیت اثبات می‌شود.

برهان. فرض می‌کنیم Nam و Ber همانند بالا باشند، همچنین $a = \ulcorner \mathsf{Ber}(x,y) \urcorner$ و برای سادگی $e = (a+1)^2$ را در نظر می‌گیریم. حال نشان می‌دهیم:

$$T \vdash \mathsf{Con}_T \longleftrightarrow \exists b \leq \overline{e}\, \mathsf{Ber}(\overline{a}, b). \qquad (1)$$

برای اثبات $\leftarrow$ فرض کنیم چنان b موجود باشد. از تعریف $\mathsf{Ber}(\overline{a}, b)$ داریم: $\forall\varphi, u \leq a\, \neg\mathsf{Nam}(\ulcorner\varphi\urcorner, u, b)$، و از $\neg\mathsf{Nam}(\ulcorner\varphi\urcorner, u, b)$ داریم: $\neg\mathsf{Pr}_T\big(\varphi(\overline{u}, \overline{b}) \wedge \exists! x\, \varphi(\overline{u}, x)\big)$، در نتیجه گزاره‌ای مثل α وجود دارد به‌طوری که $T \nvdash \alpha$ و این Con_T را نتیجه می‌دهد، چون اگر T ناسازگار باشد آنگاه هر چیزی را ثابت می‌کند. برای اثبات برعکس $(\rightarrow)$، اگر Con_T را فرض کرده و $\forall b \leq \overline{e}\, \neg\mathsf{Ber}(\overline{a}, b)$ را فرض خلف بگیریم، در اینصورت داریم:

$$\forall b \leq \overline{e}\, \neg\mathsf{Ber}(\overline{a}, b) \equiv \forall b \leq \overline{e}\, \big(\exists\varphi, u \leq \overline{a}\, \mathsf{Nam}(\ulcorner\varphi\urcorner, u, b)$$

$$\vee\, \exists z < b\, \forall\varphi, u \leq \overline{a}\, \neg\mathsf{Nam}(\ulcorner\varphi\urcorner, u, z)\big)$$

فرض کنید $\varphi_0(\overline{u_0}, .), \cdots, \varphi_{r-1}(\overline{u_{r-1}}, .)$ دنباله همه جایگذاری‌های $\varphi(\overline{u}, .)$ با شرط $\varphi, u \leq a$ و $r = e = (a+1)^2$ باشد. $\exists\varphi_i, u_i \leq \overline{a}\, \mathsf{Nam}(\ulcorner\varphi_i\urcorner, u, b_i)$ را با γ_i^0 و $\exists z < b_i\, \forall\varphi, u \leq \overline{a}\, \neg\mathsf{Nam}(\ulcorner\varphi\urcorner, u, z)$ را با γ_i^1 نشان می‌دهیم. در اینصورت داریم:

$$\forall b \leq \overline{e}\, \neg\mathsf{Ber}(\overline{a}, b) \equiv \bigwedge_{i<r} \bigwedge_{u_i \leq a} (\gamma_i^0 \vee \gamma_i^1) \equiv (\gamma_0^0 \vee \gamma_0^1) \wedge (\gamma_1^0 \vee \gamma_1^1) \wedge \cdots \wedge (\gamma_{r-1}^0 \vee \gamma_{r-1}^1)$$

$$\equiv (\gamma_0^0 \wedge \gamma_1^0 \wedge \cdots \wedge \gamma_{r-1}^0) \vee \cdots \vee (\gamma_0^{b_i} \wedge \gamma_1^{b_i} \wedge \cdots \wedge \gamma_{r-1}^{b_i}) \vee \cdots \vee (\gamma_0^1 \wedge \gamma_1^1 \wedge \cdots \wedge \gamma_{r-1}^1)$$

که در آن $b_i \in \{0, 1\}$. حال در $T + \mathsf{Con}_T$ اینگونه استدلال می‌کنیم: اگر $(\gamma_0^0 \wedge \gamma_1^0 \wedge \cdots \wedge \gamma_{r-1}^0)$ یا $(\gamma_0^1 \wedge \gamma_1^1 \wedge \cdots \wedge \gamma_{r-1}^1)$، در اینصورت چون طبق سازگاری هر زوج φ, u حداکثر یک عنصر را تعریف می‌کنند، داریم $\overline{e} = \overline{a}$ و این تناقض است، چون $e = (a+1)^2 > a$. حال اگر

$$(*) \quad (\gamma_0^{b_i} \wedge \gamma_1^{b_i} \wedge \cdots \wedge \gamma_{r-1}^{b_i})$$

را داشته باشیم و $A = \{i_1, \cdots, i_n\}$ مجموعه همه اندیس‌های γ^0 و $B = \{j_1, \cdots, j_m\}$ مجموعه اندیس‌های γ^1 در $(*)$ باشند به‌گونه‌ای که $m + n = r$، در اینصورت قرار می‌دهیم $s = minA$ و $t = minB$ و دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. $s < t$. در اینصورت طبق γ_t^1 داریم $\exists z < b_t \, \forall \varphi, u \leq \overline{a} \, \neg \mathsf{Nam}(\ulcorner \varphi \urcorner, u, z)$ بنابراین z عضوی از مجموعه $\{b_{i_1}, \cdots, b_{i_n}\}$ می‌باشد که برای آن داریم: $\exists \varphi_i, u_i \leq \overline{a} \, \mathsf{Nam}(\ulcorner \varphi_i \urcorner, u, z)$ و تناقض پیش می‌آید.

۲. $t < s$. در اینصورت طبق γ_t^1 داریم $\exists z < b_t \, \forall \varphi, u \leq \overline{a} \, \neg \mathsf{Nam}(\ulcorner \varphi \urcorner, u, z)$ و چون $t < s$ داریم $\exists z < b_s \, \forall \varphi, u \leq \overline{a} \, \neg \mathsf{Nam}(\ulcorner \varphi \urcorner, u, z)$ یعنی γ_s^1 هم برقرار است. از طرفی γ_s^0 را نیز داریم و این تناقض است.

پس (۱) ثابت شد. برای اثبات $T \nvdash \mathsf{Con}_T$ باز هم فرض خلف می‌گیریم که $T \vdash \mathsf{Con}_T$. پس طبق (۱) داریم $\exists b \leq \overline{e} \, \mathsf{Ber}(\overline{a}, b)$. چنان b را ثابت در نظر می‌گیریم. در اینصورت داریم:

$$.\forall \varphi, u \leq a \, \neg \mathsf{Nam}(\ulcorner \varphi \urcorner, u, b) \wedge \forall z < b \, \exists \varphi, u \leq a \, \mathsf{Nam}(\ulcorner \varphi \urcorner, u, z) \quad (*)$$

حال $\mathsf{Pr}_T(\mathsf{Ber}(\bar{\mathsf{a}}, \bar{\mathsf{b}}))$ را فرض می‌کنیم. پس $\mathsf{Pr}_T(\exists x \mathsf{Ber}(\overline{a}, x))$ را داریم و طبق شرایط اثبات‌پذیری داریم $\mathsf{Pr}_T(\exists ! x \mathsf{Ber}(\overline{a}, x))$ که $\mathsf{Nam}(\mathsf{Ber}, \bar{\mathsf{a}}, \mathsf{b})$ را نتیجه می‌دهد. از طرفی چون قبلاً فرض کردیم $\ulcorner \mathsf{Ber}(x, y) \urcorner = a$، پس با قرار دادن $\varphi = \mathsf{Ber}, u = a$ در $(*)$، طبق قسمت چپ ترکیب عطفی، $\neg \mathsf{Nam}(\mathsf{Ber}, \overline{a}, b)$ را نتیجه می‌گیریم که تناقض است. پس تا اینجا نشان دادیم که در $T + \mathsf{Con}_T$

عدد b وجود دارد به‌طوری که $\mathsf{Ber}(\overline{a}, b)$ و $\neg\mathsf{Pr}_T\big(\mathsf{Ber}(\overline{a}, \overline{b})\big)$ را داریم. بعلاوه برای این b داریم: $\forall c < b \exists \varphi, u \leq a \mathsf{Nam}(\varphi, u, c)$.

حال، ACT[۵] را می‌سازیم [۱۰، ۱۳]. $\mathcal{M}$ را مدلی دلخواه برای $T + \mathsf{Con}_T$ می‌گیریم. $b \in \mathcal{M}$ را مانند بالا انتخاب می‌کنیم، یعنی b را عنصری از $\mathcal{M}$ در نظر می‌گیریم که $\mathsf{Ber}(a, b)$ در $\mathcal{M}$ برقرار باشد. برای b داریم $\neg\mathsf{Pr}_T\big(\mathsf{Ber}(\overline{a}, \overline{b})\big)$. یک اتمام دلخواه $C \in \mathcal{M}$ را در نظر می‌گیریم به‌طوری که $\mathcal{K} = \mathsf{ACT}(\mathcal{M}; C)$، فرمول $\neg\mathsf{Ber}(a, b)$ را ارضا کند. همچنین $\mathcal{K}$، $\forall c < b \exists \varphi, u \leq a \mathsf{Nam}(\varphi, u, c)$ را نیز ارضا می‌کند، چون یک جمله Σ_1ـ درست است، پس در T اثبات‌پذیر است و لذا در C قرار دارد. بنابراین یا $\mathcal{K} \models \neg\mathsf{Con}_T$ یا کوچکترین b' که $\mathcal{K} \models \neg\mathsf{Ber}(a, b')$، اکیدا از b کوچکتر است. اگر $\mathcal{K} \models \neg\mathsf{Con}_T$، آنگاه به مدل مورد نظر رسیده‌ایم، در غیر اینصورت این روند را تکرار می‌کنیم. طبق (۱) بعد از حداکثر e بار انجام این روش مدلی از $\neg\mathsf{Con}_T$ را به دست می‌آوریم. در نتیجه $\neg\mathsf{Pr}_T(\mathsf{Con}_T)$ در هر مدل $T + \mathsf{Con}_T$ برقرار می‌شود، بنابراین در این نظریه اثبات‌پذیر است. $\square$

قضیه اول ناتمامیت

قضیه ۲.۱.۳. (*قضیه اول ناتمامیت*) *فرض کنید T یک نظریه سازگار بازگشتی مقدماتی برای حساب و شامل حساب پئانو باشد، آنگاه یک جمله φ وجود دارد که اثبات‌ناپذیر بودن خودش را بیان می‌کند و به‌گونه‌ای است که:*

۱. *اگر T سازگار باشد، آنگاه $T \nvdash \varphi$.*

۲. *اگر T، ωـ سازگار باشد، آنگاه $T \nvdash \neg\varphi$.*

برهان. در بخش قبل از گزاره $\exists b \leq \overline{e}\, \mathsf{Ber}(\overline{a}, b)$ استفاده کردیم و نشان دادیم که در T با Con_T هم‌ارز است. در اینجا از قسمت سمت راست هم‌ارزی زیر که یک گزاره Π_1 است، استفاده می‌کنیم و آن را با γ نشان می‌دهیم:

$$T \vdash \exists b \leq \overline{e}\, \mathsf{Ber}(\overline{a}, b) \equiv \exists y \leq \overline{e}\, [\forall \varphi, u \leq \overline{a}\, \neg\mathsf{Nam}(\ulcorner \varphi \urcorner, u, y)$$

[۵] Arithmetical Completeness Theorem

$$\wedge \forall z < \bar{b}\, \exists \varphi, u \leq \bar{a}\, \mathsf{Nam}(\ulcorner \varphi \urcorner, u, z)] \quad (۲)$$

پیش از این نشان دادیم که $T + \mathsf{Con}_T \vdash \neg \mathsf{Pr}_T(\mathsf{Con}_T)$، پس طبق (۱)، (۲) و شرایط اثبات‌پذیری داریم $T + \mathsf{Con}_T \vdash \neg \mathsf{Pr}_T(\gamma)$، و این نیمی از قضیه اول ناتمامیت صوری شده را نتیجه می‌دهد. برای نیمه دوم اثبات، ابتدا بیان صوری ωــCon_T را می‌آوریم:

$$\forall \varphi, u\, \{[\forall d\, \mathsf{Pr}_T\big(\varphi(\overline{u}, \overline{d})\big)] \rightarrow \neg \mathsf{Pr}_T\big(\exists x\, \neg \varphi(\overline{u}, x)\big)\}. \qquad (۳)$$

چون γ، Π_1 است، پس $\neg\gamma$، Σ_1 است، بنابراین A را Δ_0 فرمولی می‌گیریم که $T \vdash (\neg\gamma) \equiv \exists x A(x)$. در T+ωــCon_T استدلال می‌کنیم. $\mathsf{Pr}_T(\neg\gamma)$ را در نظر می‌گیریم. یعنی $\mathsf{Pr}_T\big(\exists x A(\overline{x})\big)$. طبق عکس نقیض (۳)، xای وجود دارد به‌طوری که داریم $\neg\mathsf{Pr}_T\big(\neg A(\overline{x})\big)$. طبق تمامیت T نسبت به Δ_0ــ جمله‌ها برای این x داریم $\mathsf{Pr}_T\big(A(\overline{x})\big)$، اما به‌وضوح داریم $T \vdash \omega$ــ$\mathsf{Con}_T \rightarrow \mathsf{Con}_T$ (با به‌کار بردن فرمول $x = x$ بجای φ). از Con_T نتیجه می‌شود که $\mathsf{Pr}_T\big(A(\overline{x})\big)$، $A(x)$ را برای هر x نتیجه می‌دهد، زیرا در غیر اینصورت اگر $\neg A(\overline{x})$ را داشته باشیم، آنگاه $\mathsf{Pr}_T\big(\neg A(\overline{x})\big)$ را داریم و این متناقض با $\neg\mathsf{Pr}_T\big(\neg A(\overline{x})\big)$ است که قبلاً بدست آوردیم. بنابراین در T+ωــCon_T نشان دادیم که اگر $\mathsf{Pr}_T(\neg\gamma)$ آنگاه $\neg\gamma$، یعنی $\neg\mathsf{Con}_T$. همزمان Con_T را داریم و اینکه T ناسازگار است؛ با این تناقض نیمه دوم قضیه اول ناتمامیت صوری شده بدست می‌آید: $T + \omega$ــ$\mathsf{Con}_T \vdash \neg\mathsf{Pr}_T(\neg\gamma)$. $\square$

۲.۳ اثباتی از قضیه تارسکی درباره تعریف‌ناپذیری درستی

در اینجا نشان می‌دهیم که با استفاده از اثبات کیکوچی می‌توان صورت قوی قضیه تارسکی[۶] را اثبات کرد. کیکوچی [۱۰] می‌نویسد که کارش از کار بولوس الهام گرفته شده است که در آن، صورت ضعیف قضیه تارسکی اثبات شده است.

قضیه ۱.۲.۳. *قضیه تارسکی درباره تعریف‌ناپذیری درستی: اگر فرمول A با یک متغیر آزاد چنان*

[۶] A. Tarski

موجود باشد که برای هر جمله φ

$$T \vdash \varphi \equiv A(\ulcorner \varphi \urcorner) \qquad (۴)$$

آنگاه T ناسازگار است.

برهان. برعکس را فرض می‌کنیم (فرض خلف) که T سازگار باشد. در T اینگونه تعریف می‌کنیم: زوج $\langle \psi, u\rangle$، w را توصیف می‌کند اگر داشته باشیم:

$$.A\big(\ulcorner \psi(\overline{u}, \overline{w}) \wedge \forall x < \overline{w}\, \neg \psi(\overline{u}, x)\urcorner\big) \qquad (۵)$$

اگر T سازگار باشد، آنگاه هر زوج $\langle \psi, u\rangle$ که ψ یک فرمول و u استاندارد باشد، حداکثر یک عنصر w را توصیف می‌کنند. در نتیجه برای هر $n, r \in \mathbb{N}$ داریم:

$$T \vdash \forall \varphi, u \leq \overline{n}\, \big[(\exists w < \overline{r} : \text{را } w \text{توصیف می‌کند} \langle \varphi, u\rangle) \Rightarrow \exists ! w < \overline{r} : \text{را } w \text{توصیف می‌کند} \langle \varphi, u\rangle\big]$$

در حقیقت با استدلال در T می‌بینیم که اگر $\langle \varphi, u\rangle$، w را توصیف کند، در اینصورت طبق (۵)،

$$(*) \qquad \varphi(u, w) \wedge \forall x < w \neg \varphi(u, x)$$

برقرار می‌شود. از این رو w منحصرا توسط $\langle \varphi, u\rangle$ توصیف می‌شود، زیرا اگر $\exists v < r$ که $v \neq w$ و $\langle \varphi, u\rangle$، v را توصیف کند (فرض خلف) در اینصورت طبق (۵) داریم

$$.(**) \qquad \varphi(u, v) \wedge \forall x < v\, \neg \varphi(u, x)$$

از طرفی داریم $v < w$ یا $w < v$؛ نشان می‌دهیم در هر دو حالت تناقض برقرار می‌شود. فرض کنیم $v < w$، در اینصورت طبق $(**)$ داریم $\varphi(u, v)$ و از قسمت راست ترکیب عطفی $(*)$ داریم

$\forall x < w\, \neg\varphi(u,x)$، و چون $v < w$، پس داریم $\neg\varphi(u,v)$، و این متناقض با سازگاری است. برای $w < v$ به‌طور دقیقاً مشابه اثبات می‌شود. نشان می‌دهیم که برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم:

$$T \vdash \exists b \leq (k+۱)^۲\, \forall \varphi, u < k \ : \langle\varphi,u\rangle \text{توصیف نمی‌کند } b \text{ را} \qquad (۶)$$

در واقع، حداکثر $(k+۱)^۲$ زوج $\langle\varphi,u\rangle$ که $\varphi, u < k$ باشند وجود دارند و هر چنان زوجی حداکثر یک عنصر را توصیف می‌کند. فرض کنید $B(x,y)$ بصورت:

$$\forall \varphi, u < x\, \{[\exists w \ : \langle\varphi,u\rangle \text{توصیف می‌کند } w \text{را}] \to \exists w < y \ : \langle\varphi,u\rangle \text{توصیف می‌کند } w \text{را}\} \qquad (۷)$$

و $C(x,y)$ بصورت $B(x,y) \wedge \forall z < w\, \neg B(x,z)$ باشد. قرار می‌دهیم $k = \ulcorner C(x,y) \urcorner$ و **(۶)** را بکار می‌بریم تا $b \leq (k+۱)^۲$ را بدست آوریم، که کوچکترین عنصری است که هیچ زوج $\langle\varphi,u\rangle$ با شرط $\varphi, u < k$ آن را توصیف نمی‌کند و این تناقض است چون فرمول $C(x,y)$ با پارامتر k آن را توصیف می‌کند. $\square$

فصل ۴

قضایای ناتمامیت و مسأله سگ آبی پُرکار

در این فصل اثبات دیگری از کوتلارسکی برای قضیه دوم ناتمامیت ارایه می‌شود که بر اساس کار با فرمول نظیر مسأله مشهور سگ آبی پُرکار است.

قضیه دوم ناتمامیت

قضیه ۲.۰.۴. *نظریه T دارای مدلی است که $\neg\mathsf{Con}_T$ را ارضا می‌کند، یعنی* $T \nvdash \mathsf{Con}_T$.

برهان. T را یک نظریه سازگار بازگشتی مقدماتی در زبان حساب و شامل حساب پئانو در نظر می‌گیریم. اثباتی که در این فصل بررسی می‌کنیم بر اساس کار با فرمول $\Phi(x,y)$ بصورت زیر است:

$$\forall\varphi, u \leq x\,\{[\varphi \in \Delta_\circ \wedge \exists w\,\mathbf{Tr}_{\Delta_\circ}\big(\varphi(\overline{u},\overline{w})\big)] \rightarrow \exists w < y\,\mathbf{Tr}_{\Delta_\circ}\big(\varphi(\overline{u},\overline{w})\big)\} \quad (۸)$$

این فرمول نظیر مسأله مشهور Busy Beaver است [۲]. در واقع فرمول $\Phi_n(x,y)$ مشابه فرمول (۸) برای Σ_n فرمول‌ها است که در بخش ۲.۲ استفاده شده است. همچنین در ۲.۲ نشان داده شد که $T \vdash \forall x\,\exists y\,\Phi_n(x,y)$، بویژه این مطلب برای $\Delta_\circ$ فرمول‌ها نیز برقرار است، پس داریم: $T \vdash \forall x\,\exists y\,\Phi(x,y)$. در نتیجه تابع $F(x) = min\ y : \Phi(x,y)$ در T خوش تعریف است، زیرا داریم: $\forall a\,\exists b\,[b = F(a)]$. ایده اثباتی که در زیر آورده‌ایم کار با فرمول $\mathsf{Pr}_T\big(\Phi(\overline{x},\overline{y})\big)$ است که یک $\Sigma_۱$ فرمول در L_{PA} با متغیرهای x, y است. ویژگی اصلی $\Phi(x,y)$ بصورت زیر است:

$$.T \vdash \{\mathsf{Con}_T \rightarrow \forall x, y\,[\mathsf{Pr}_T\big(\Phi(\overline{x},\overline{y})\big) \rightarrow \Phi(x,y)]\} \quad (۹)$$

در حقیقت با استدلال در T می‌بینیم که اگر داشته باشیم $\exists x, y\,[\mathsf{Pr}_T\big(\Phi(\overline{x},\overline{y})\big) \wedge \neg\Phi(x,y)]$ (فرض خلف) و $\neg\Phi(x,y)$ را فرض کنیم، آنگاه چون $\Phi(x,y)$ یک فرمول $\Pi_۱$ است، پس نقیض آن $\Sigma_۱$ است، بنابراین طبق $\Sigma_۱$ـ تمامیت اثبات‌پذیری $\mathsf{Pr}_T\big(\neg\Phi(\overline{x},\overline{y})\big)$ را نتیجه می‌گیریم و این تناقض با Con_T را نشان می‌دهد و بدین‌گونه (۹) اثبات می‌شود.

حال فرض می‌کنیم (۹) را داشته باشیم، در اینصورت نشان می‌دهیم که $a = a(T)$ وجود دارد

به‌طوری که

$$.T \vdash [\mathsf{Con}_T \to \forall b\, \neg \mathsf{Pr}_T\big(\Phi(\overline{a}, \overline{b})\big)] \qquad (۱۰)$$

در T استدلال می‌کنیم. a را ثابت در نظر می‌گیریم. برعکس (۱۰) را فرض می‌کنیم (فرض خلف) در اینصورت کوچکترین b که $\mathsf{Pr}_T\big(\Phi(\overline{a}, \overline{b})\big)$ برقرار باشد را انتخاب می‌کنیم. طبق (۹)، $\Phi(a, b)$ هم برقرار می‌شود. فرمول $\mathsf{Pr}_T\big(\Phi(\overline{a}, \overline{y})\big)$ را با $\Phi(a, b)$ جایگزین می‌کنیم، بدینصورت که ابتدا این فرمول را به شکل $\Sigma_۱$ آن می‌نویسیم، یعنی $\mathsf{Pr}_T(x, y)$ را بصورت $\exists z H(x, y, z)$ که $H \in \Delta_۰$ است می‌نویسیم و دو متغیر y, z را به یکی تبدیل می‌کنیم، به شرطی که $\langle y, z\rangle$ وجود داشته باشد، و فرمول بدست آمده از این طریق را با $\Phi(a, b)$ مشخص می‌کنیم. اگر a به اندازه کافی بزرگ باشد، یعنی $a > \ulcorner H(x, y, z)\urcorner$، آنگاه b' را که اکیداً از b کوچکتر است و فرمول را ارضا می‌کند بدست می‌آوریم، و این متناقض با کمینه بودن b است، زیرا برای هر b' کمتر از b گزاره $\neg H(a, b'_۰, b'_۱)$ یک فرمول $\Delta_۰$ و درست است که اثبات‌پذیر است، بنابراین داریم $\neg\mathsf{Con}_T$ و با این تناقض (۱۰) ثابت می‌شود.

حال نشان می‌دهیم که برای هر $a \in \mathbb{N}$ مدل‌هایی از T وجود دارند به‌طوری که رابطه (۱۰) برقرار نمی‌شود. سریعترین روش ساخت چنین مدل‌هایی را بیان می‌کنیم. با یک $\mathcal{M} \models T$ دلخواه شروع می‌کنیم. دنباله $\langle \varphi_i(\overline{u_i}, x) : i < r\rangle$ را که همه جایگذاری‌های $\varphi(\overline{u}, x)$ با شرط $\varphi, u \le a$ و $\varphi \in \Delta_۰$ است در نظر می‌گیریم. دنباله $\langle \mathcal{M}_i : i < r\rangle$ از مدل‌های T را بصورت زیر می‌سازیم. اگر $\mathcal{M} \models \mathsf{Pr}_T\big(\forall x\, \neg\varphi_۰(\overline{u_۰}, x)\big)$ آنگاه قرار می‌دهیم $\mathcal{M}_۰ = \mathcal{M}$، در غیر اینصورت فرض می‌کنیم:

$$.\mathcal{M} \models \neg\mathsf{Pr}_T\big(\neg\exists x\, \varphi_۰(\overline{u_۰}, x)\big)$$

تمام‌سازی C را در $\mathcal{M}$ به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که

$$.\mathsf{ACT}(\mathcal{M}, C) \models \exists x\, \varphi_۰(\overline{u_۰}, x)$$

بنابراین $\mathcal{M}_۰ \supseteq_{end} \mathcal{M}$ وجود دارد که مدلی از T است و یا $\mathcal{M}_۰ \models \mathsf{Pr}_T\big(\neg\exists x\, \varphi_۰(\overline{u_۰}, x)\big)$ یا $\mathcal{M}_۰ \models \exists w\, \mathsf{Pr}_T\big(\varphi_۰(\overline{u_۰}, \overline{w})\big)$ را داریم (در واقع، چون $\varphi_۰$ یک فرمول $\Delta_۰$ و در $\mathcal{M}_۰$ درست است،

پس در این مدل اثبات‌پذیر است). حال این روند را تکرار می‌کنیم، یعنی در مورد $\mathcal{M}_۰$ و $\varphi_۱(\overline{u_۱}, x)$ همین روش را به کار می‌بریم تا $\mathcal{M}_۱$ را بدست آوریم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. مدل نهایی $\mathcal{M}_{r-۱}$، فرمول

$$\forall i < r \, \mathsf{Pr}_T\big(\forall x \, \neg\varphi_i(\overline{u_i}, x)\big) \vee \exists w \, \mathsf{Pr}_T\big(\varphi(\overline{u_i}, \overline{w})\big)$$

را ارضا می‌کند، که این مدل طبق عکس نقیض رابطه (۱۰)، $\neg\mathsf{Con}_T$ را محقق می‌سازد. در $\mathcal{M}_{r-۱}$ برای هر $i < r$ که قسمت سمت راست ترکیب فصلی برقرار شود، کوچکترین w مناسب را انتخاب می‌کنیم و b را بیشترین مقدار همه wها + ۱ قرار می‌دهیم. $\square$

اثبات قضیه اول ناتمامیت را در مرجع [۱۳] می‌توان دید. اگرچه این قضیه با فرضیات بسیار ضعیف‌تر، بدون استفاده از قضیه تمامیت حسابی شده، نیز اثبات می‌شود [۱۵] (که در فصل ۲ این پایان‌نامه بررسی شده است [۷.۱.۲]).

مراجع

[1] G. Boolos, *A New Proof of the Gödel Incompleteness Theorem,* Notices Amer. Math. Soc. 36 (1989) 388–290.

[2] G. Boolos and R. Jeffrey, *Computability and Logic,* 5rd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[3] G. Boolos, The Logic of Provability, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[4] A. Church, *A Note on the Entscheidungsproblem,* J. Symbolic Logic 1 (1936) 40–41.

[5] K. Gödel, *Über Formal Unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I,* Monatshefte Math. Phys. 38 (1931) 173–198.

[6] S. Feferman, *Arithmetization of Mathematics in General Setting,* Fund. Math. 49 (1960) 35–92.

[7] P. Hájek, P. Pudlák, *Metamathematics of First Order Arithmetic,* Perspectives in Mathematical Logic, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993.

[8] T. Jech, *On Gödel's Second Incompleteness Theorem,* Proc. Amer. Math. Soc. 121 (1994) 311–313.

[9] R. Kaye, Models of Peano Arithmetic, Oxford Logic Guides 15, Oxford University Press, Oxford, 1991.

[10] M. Kikuchi, A Note on Boolos' Proof of the Incompleteness Theorem, Math. Log. Q. 40(4) (1994) 528–532.

[11] M. Kikuchi, Kolmogorov Complexity and the Second Incompleteness Theorem, Arch. Math. Log. 36(6) (1997) 437–443.

[12] S.C. Kleene, Recursive Predicates and Quantifiers, Trans. Amer. Math. Soc. 53 (1943) 41–73.

[13] H. Kotlarski, *On the Incompleteness Theorems,* J. Symbolic Logic 59 (4) (1994) 1414–1419.

[14] H. Kotlarski, *An addition to Rosser's Theorem,* J. Symbolic Logic 61 (1) (1996) 285–292.

[15] H. Kotlarski, *Other Proofs of Old Results,* Math. Log. Q. 44 (1998) 474–480.

[16] H. Kotlarski, *The Incompleteness Theorems After 70 Years,* Ann. Pure App. Logic 126 (2004) 125–138.

[17] A. Mostowski, *On Definable Sets of Positive Integers,* Fund. Math. 34 (1947) 81–112.

[18] A. Robinson, *On Language which Are Based on Nonstandard Arithmetic,* Nagoya Math. J. 22 (1963) 83–117.

[19] J.B. Rosser, *Extensions of Some Theorems of Gödel and Church,* J. Symb. Logic 1 (1936) 87–91.

[20] C. Smoryński, *The Incompleteness Theorems,* in: J. Barwise (Ed.), Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, Amsterdam, 1977, pp. 821–865.

[21] A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in der Formalisierten Sprachen,* BStudia Phil. 1 (1936) 261–405; A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics,* Oxford University Press, Oxford, 1956, 152–278 (English Translation).

[22] A. Turing, *Computable Numbers with an Application to Entscheidungsproblem,* Proc. London Math. Soc. 42 (1936) 230–265; Also in: M. Davis, The Undecidable, Raven Press, New York, 1965, pp. 116–154.

[23] Vopěnka, *A New Nroof of the Gödel's Result of Non–Provability of Consistency,* Bull. Acad. Polon. Sci. 14 (1996) 111–116.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اثبات‌پذیر	Provable
اثبات‌پذیری	Provability
استدلال	Argument
استقرا	Induction
استلزام	Implication
استنتاج	Inference
تصدیق کننده، ارضا کننده	Satisfying
اکیداً	Strictly
بازگشتی	Recursive
برهان	Proof
پارادوکس	Paradox
پارادوکس بِری	Berry’s Paradox
تابع	Function
ترکیب عطفی	Conjuction
ترکیب فصلی	Disjunction
تمام‌سازی	Completion
تمامیت	Completeness
تناقض	Contradiction

جایگزینی	Substitution
جمله مستقل	Independent Statement
حساب	Arithmetic
حسابی	Arithmetical
حکم	Statement
درستی	Truth
زبان	Language
زوج، دوتایی	Pair
سازگار	Consistent
سلسله مراتب	Hierarchy
سور	Quantifier
شرایط	Conditions
صوری	Formal
صوری‌سازی	Formalized
عدد گودل	Gödel Number
عنصر	Element
فرمول	Formula
قضایای ناتمامیت	Incompleteness Theorems
قضیه	Theorem
کران‌دار	Bounded
متغیر	Variable
مخالف، معکوس	Contrary
ناسازگار	Inconsistent
نتیجه	Conclusion
نظریه	Theory

همارز .... Equivalent

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

استدلال	Argument
حساب	Arithmetic
حسابی	Arithmetical
پارادوکس بری	Berry’s Paradox
کراندار	Bounded
تمامیت	Completeness
تمام‌سازی	Completion
شرایط	Condition
ترکیب عطفی	Conjuction
نتیجه	Conclusion
سازگار	Consistent
تناقض	Contradiction
معکوس، مخالف	Contrary
اثبات‌پذیر	Demonstrable
قطری‌سازی	Diagonalization
ترکیب فصلی	Disjunction
عنصر	Element
هم‌ارز	Equivalent

Formal .... صوری
Formalized .... صوری‌سازی
Formula .... فرمول
Function .... تابع
Gödel Number .... عدد گودل
Hierarchy .... سلسله مراتب
Implication .... استلزام
Incompleteness .... ناتمامیت
Incompleteness Theorems .... قضایای ناتمامیت
Inconsistent .... ناسازگار
Independent statement .... جمله مستقل
Induction .... استقرا
Inference .... استنتاج
Language .... زبان
Pair .... زوج، دوتایی
Paradox .... پارادوکس
Proof .... برهان
Provable .... اثبات‌پذیر
Quantifier .... سور
Recursive .... بازگشتی
Satisfying .... ارضاپذیری
Statement .... حکم
Strictly .... اکیداً
Substitution .... جایگزینی
Theorem .... قضیه

نظریه	Theory
درستی	Truth
تصمیم‌ناپذیری	Undecidability
متغیر	Variable

Surname: Sahahi **Name:** Mehrnoosh

Title: The Incompleteness Theorems of Gödel and Rosser

Supervisor: Saeed Salehi

Advisor: Hazhir Homei

Degree: Master of Science **Subject:** Pure Mathematics

Field: Mathematical Logic **University of Tabriz**

Faculty of Mathematical Sciences **Date:** 2015 **Number of Pages:** 45

Keywords: The Incompleteness Theorems, Diagonal Lemma.

Abstract

In this dissertion, we give some information about new proofs of the incompleteness theorems, found in 1990s. Some of them do not require the diagonal lemma as a method of construction of an independent statement. Kotlarski proves these theorems avoiding the use of the arithmetized completeness theorem and these proofs are given in chapter two. In chapter three, we give the Kikuchi's proof based on the so-called Berry's paradox, and the Kotlarski's proof of the second incompleteness theorem is based on some work with the formula counterpart of so-called busy beaver problem is presented in chapter four.

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS

The Incompleteness Theorems of Gödel and Rosser

Supervisor

Saeed Salehi

Advisor

Hazhir Homei

By

Mehrnoosh Sahahi

2015